

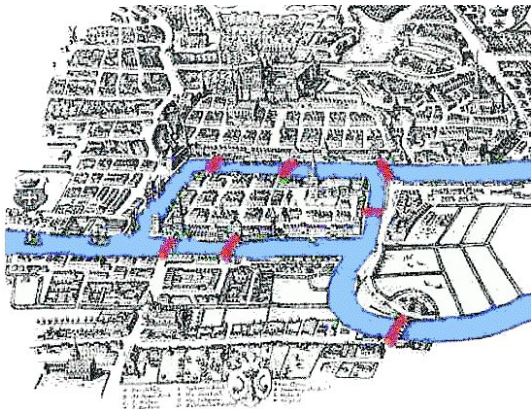
NEKAJ KLASIČNIH REZULTATOV IZ TEORIJE GRAFOV

Štefko Miklavič

Univerza na Primorskem
UP FAMNIT in UP IAM

19. marec 2025

- Kaj je to teorija grafov?
- Eulerjev obhod grafa
- Hamiltonov cikel grafa
- Eulerjeva formula
- Izrek štirih barv (???)



Slika: Königsberg in reka Pregel

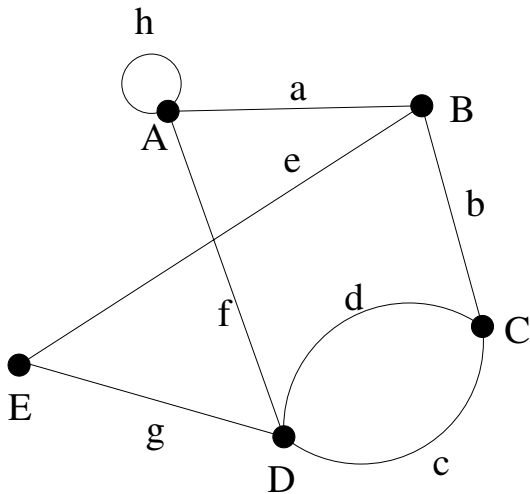


Slika: Leonhar Euler, 1707 - 1783

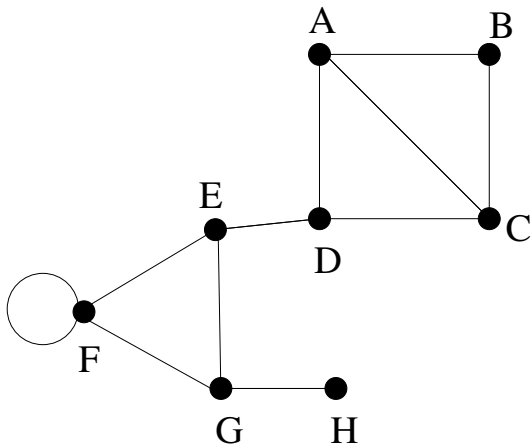


Slika: Kaliningrad

Graf je sestavljen iz **vozlišč** (oz. točk) in **povezav**. Vsaka povezava grafa povezuje dve vozlišči grafa. Vozlišči, ki jih določena povezava povezuje, sta **krajišči** te povezave. Vozlišča grafa ponavadi predstavimo kot točke v ravnini, povezave pa kot črte med ustreznima dvema vozliščema.



Nekaj primerov



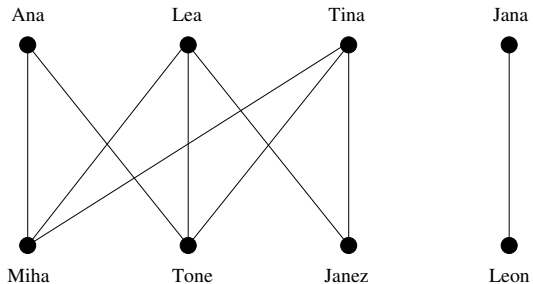
A
●

B
●

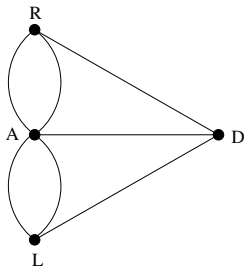
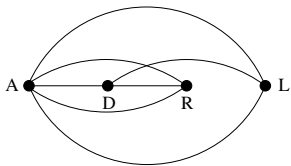
●
D

●
C

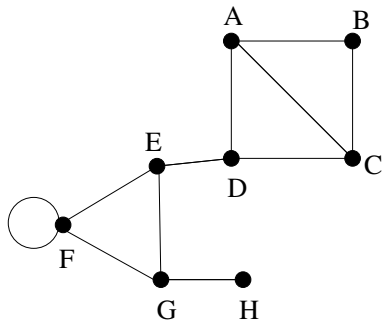
Nekaj primerov



Nekaj primerov



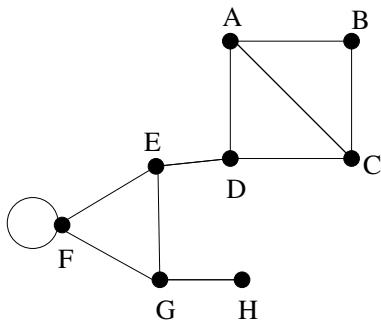
Vozlišči sta sosednji, če sta krajišči iste povezave.



- Vozlišči *A* in *B* sta sosednji.
- Vozlišči *G* in *H* sta sosednji.
- Vozlišči *B* in *D* nista sosednji.

Sosednji povezavi

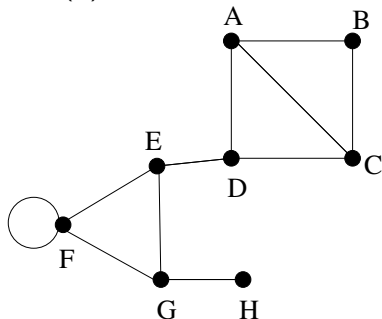
Povezavi sta sosednji, če imata skupno krajišče.



- Povezavi AB in AC sta sosednji.
- Povezavi DE in EF sta sosednji.
- Povezavi BC in GH nista sosednji.

Stopnja vozlišča

Stopnja vozlišča je število povezav, ki imajo to vozlišče za krajišče (zanka se šteje dvakratno). **Liho vozlišče** je vozlišče lihe stopnje. **Sodo vozlišče** je vozlišče sode stopnje. Oznaka za stopnjo vozlišča x : $d(x)$.



- $d(A) = 3$.
- $d(F) = 4$.
- $d(H) = 1$.

Izrek o številu lihih vozlišč v grafu

Število lihih vozlišč v grafu Γ je vedno sodo.

Naj bo V množica vozlišč grafa Γ , ter E množica povezav grafa Γ .

Dokaz Izreka 1

Naj bo V množica vozlišč grafa Γ , ter E množica povezav grafa Γ .
Seštejmo stopnje vseh vozlišč grafa Γ :

$$\sum_{x \in V} d(x).$$

Naj bo V množica vozlišč grafa Γ , ter E množica povezav grafa Γ .
Seštejmo stopnje vseh vozlišč grafa Γ :

$$\sum_{x \in V} d(x).$$

Opazimo, da je

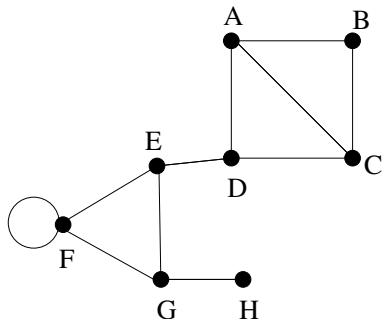
$$\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|,$$

kar je sodo število.

Sprehod je zaporedje vozlišč grafa, ki ima naslednji lastnosti:

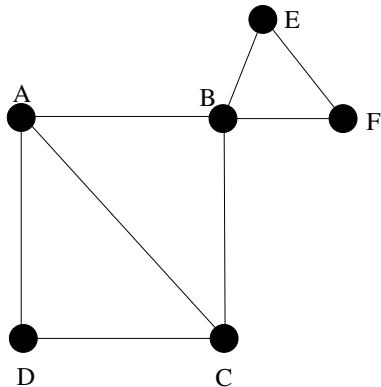
- vsako vozlišče tega zaporedja (razen zadnjega) je sosednje naslednjemu vozlišču,
- vsaka povezava grafa nastopa v tem zaporedju kvečjemu enkrat.

Prvo vozlišče tega zaporedja je **začetno vozlišče** sprehoda, zadnje pa **končno vozlišče** sprehoda. Število povezav v sprehodu je **dolžina sprehoda**.



- $ABCD$ je sprehod dolžine 3.
- $ABCADEGFE$ je sprehod dolžine 8.
- $ABDE$ ni sprehod.
- $DEGFED$ ni sprehod.

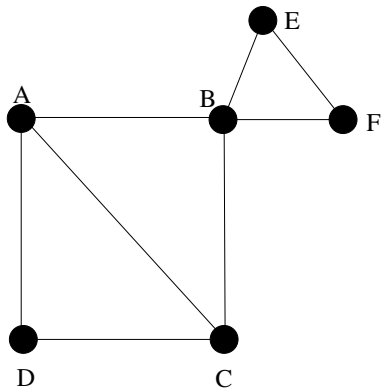
Obhod je sprehod, pri kateri je začetno vozlišče enako končnemu.



- $EBFE$ je obhod dolžine 3.
- $ABCD A$ je obhod dolžine 4.
- $EFBCDABE$ je obhod dolžine 7.

Eulerjev sprehod

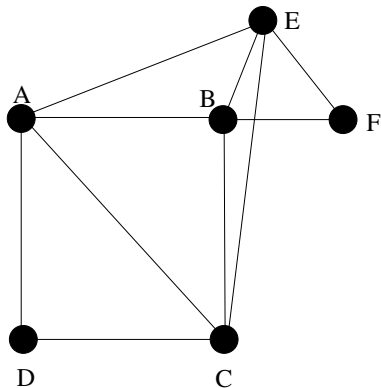
Eulerjev sprehod je sprehod, ki gre skozi vsako povezavo grafa.



ABEFBCDAC je
Eulerjev sprehod.

Eulerjev obhod

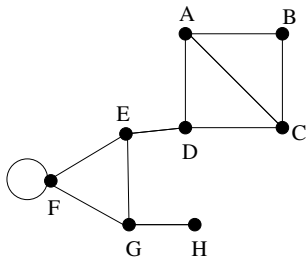
Eulerjev obhod je obhod, ki gre skozi vsako povezavo grafa.



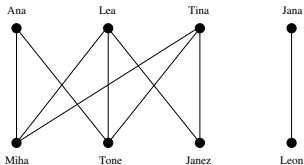
AEFBECDACBA je Eulerjev obhod.

Povezanost grafa

Graf je povezan, če med poljubnima dvema vozliščema tega grafa obstaja vsaj en sprehod. V nasprotnem primeru je graf **nepovezan**.



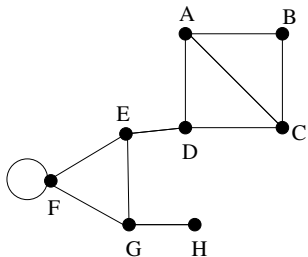
Slika: Povezan graf



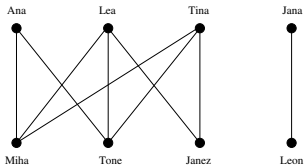
Slika: Nepovezan graf

Povezanost grafa

Graf je povezan, če med poljubnima dvema vozliščema tega grafa obstaja vsaj en sprehod. V nasprotnem primeru je graf **nepovezan**.



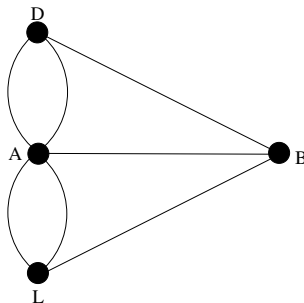
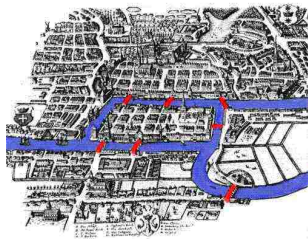
Slika: Povezan graf



Slika: Nepovezan graf

Od sedaj naprej privzemimo, da so naši grafi povezani.

Konigsberški mostovi - graf



Kdaj ima (povezan) graf Eulerjev sprehod oz. Eulerjev obhod?

Eulerjev obhod

Če ima graf Eulerjev obhod, potem so vsa njegova vozlišča sode stopnje.

Oziroma: če ima graf vozlišče lihe stopnje, potem nima Eulerjevega obhoda.

Eulerjev obhod

Če ima graf samo vozlišče sode stopnje, potem ima Eulerjev obhod.

Eulerjev sprehod

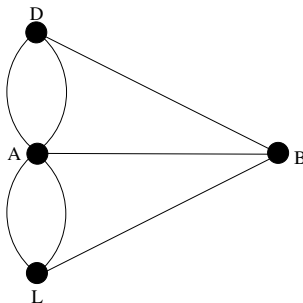
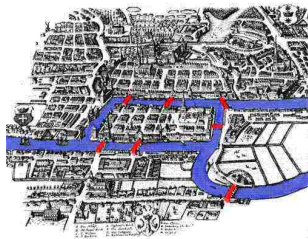
Če ima graf Eulerjev sprehod (ki ni obhod), potem ima natanko dve vozlišči lihe stopnje.

Oziroma: če ima graf eno ali več kot dve lihi vozlišči, potem nima Eulerjevega sprehoda.

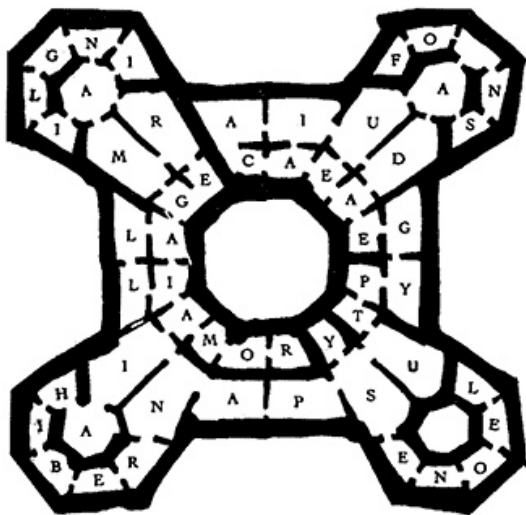
Eulerjev sprehod

Če ima graf dve lihi vozlišči, potem ima Eulerjev sprehod.

Konigsberški mostovi - rešitev



Labirinti



Umberto Eco: Ime rože

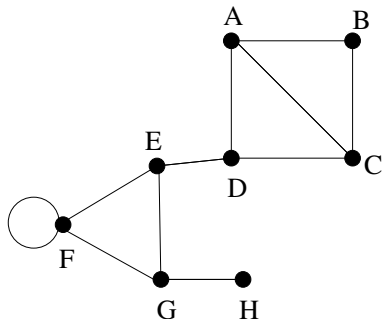
Samo en način je, kako najdeš pot iz labirinta. Na vsakem novem križišču, se pravi takem, kjer še nisi bil, je treba mesto, kjer si vstopil, zaznamovati s tremi znaki. Če po znamenjih na svoji poti vidiš, da si že bil tam, označiš kraj, skozi katerega si prišel tja, z enim samim znakom. Če so vsi prehodi že označeni, se moraš vrniti po isti poti nazaj. Če pa je kakšen prehod še brez znakov, izbereš tega in ga označiš z dvema znakoma. Če greš skozi prehod, ki nosi en sam znak, mu dodaš še dva, tako da bo imel tisti prehod potlej tri. Prehodil si vse dele labirinta, če takrat, ko prideš do razpotja, nikdar ne greš skozi prehod s tremi znaki, razen če ni še kakšen prehod neoznačen.

Pot in cikel v grafu

- Pot v grafu Γ je takšen sprehod v grafu Γ , v katerem so vsa vozlišča medsebojno različna.

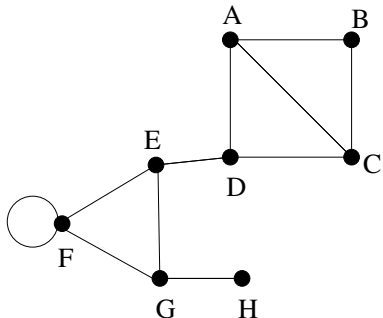
Pot in cikel v grafu

- Pot v grafu Γ je takšen sprehod v grafu Γ , v katerem so vsa vozlišča medsebojno različna.
- Cikel v grafu Γ je takšen obhod grafa Γ , v katerem so vsa vozlišča, ki v njem nastopajo, različna (razen seveda prvega in zadnjega).



- $ABCD$ je pot dolžine 3.
- $ABCADEGFE$ ni pot.
- $HGFED$ je pot dolžine 4.
- $ABCDA$ ni pot.

Cikel v grafu

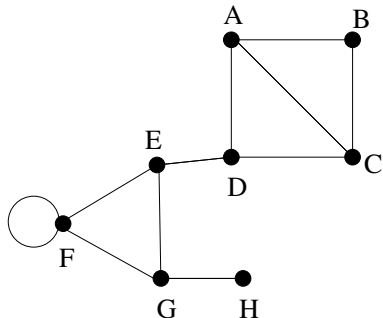


- $EGFE$ je cikel dolžine 3.
- $ABCD$ je cikel dolžine 4.
- $ABCDEGFEDA$ ni cikel.

Hamiltonova pot in Hamiltonov cikel grafa

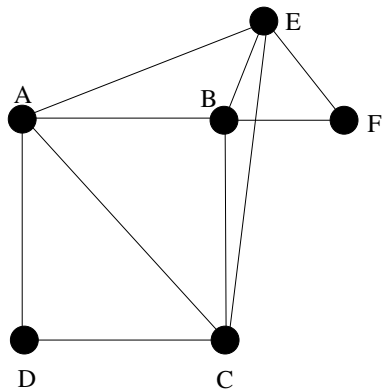
Pot (oziroma cikel) v grafu Γ je **Hamiltonova pot** (oziroma **Hamiltonov cikel**), če v njej (oziroma njem) nastopajo vsa vozlišča grafa

Hamiltonove poti in Hamiltonovi cikli

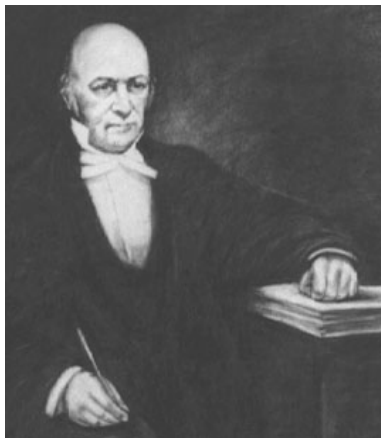


- $ABCDEFGH$ je Hamiltonova pot grafa.
- Ta graf nima Hamiltonovega cikla.

Hamiltonove poti in Hamiltonovi cikli

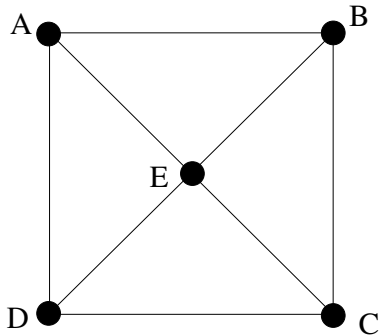


- $AEFBCDA$ je Hamiltonov cikel grafa.
- $AEFBCD$ je Hamiltonova pot grafa.



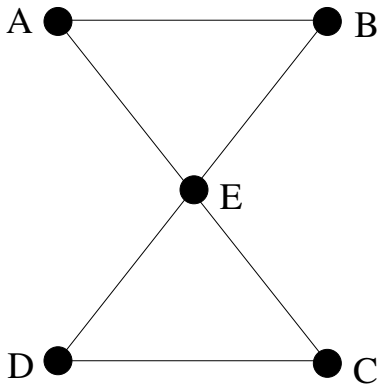
Slika: William Rowan Hamilton (1805 - 1865)

Očitno je, da nam **zanke** in **večkratne povezave** pri iskanju Hamiltonskih poti in ciklov nič ne pomagajo. Zato bomo od sedaj naprej privzeli, da so naši grafi **enostavni**, torej **brez zank** in **brez večkratnih povezav**.



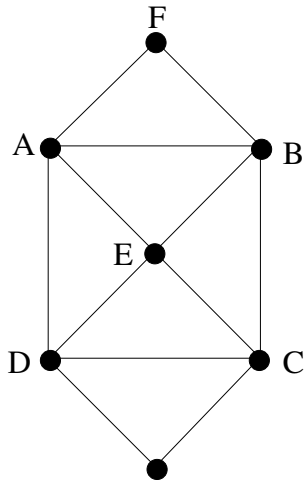
Ta graf ima Hamiltonov cikel,
nima pa Eulerjevega cikla.

Euler vs Hamilton

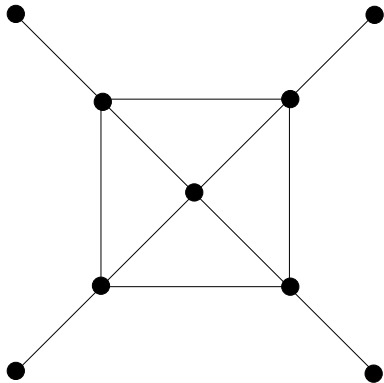


Ta graf ima Eulerjev cikel, nima pa Hamiltonovega cikla. Ima pa Hamiltonovo pot.

Euler vs Hamilton



Ta graf ima tako Hamiltonov kot tudi Eulerjev cikel.



Ta graf nima niti Eulerjevega
niti Hamiltonovega cikla.

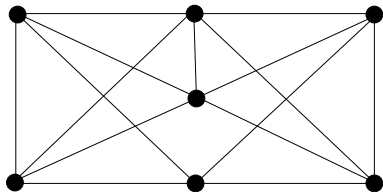
Dirac-ov izrek

Naj bo Γ povezan graf, ki ima v vozlišč (kjer je $v \geq 3$). Če je stopnja vsakega vozlišča grafa Γ vsaj $v/2$, potem graf zagotovo ima Hamiltonov cikel.

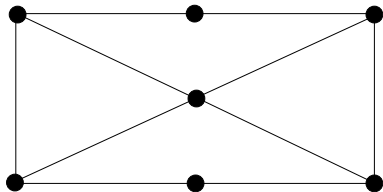


Slika: Paul Adrien Maurice Dirac (1902 - 1984)

Dirac-ov izrek - primer



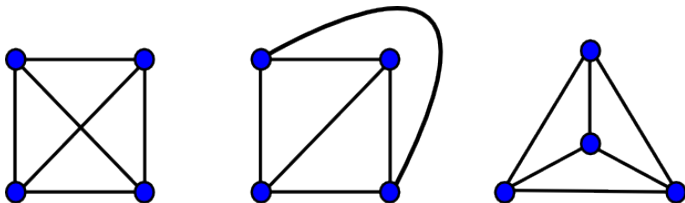
Dirac-ov izrek - primer



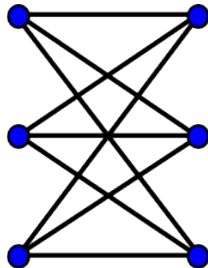
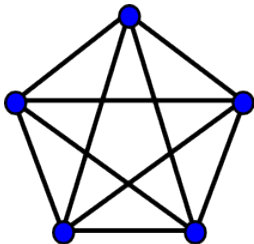
Ravninski grafi

Graf je **ravninski**, če ga lahko narišemo tako, da se nobeni dve njegovi povezavi ne sekata (razen morda v skupnem vozlišču).

Ravninski graf



Slika: Ravninski graf



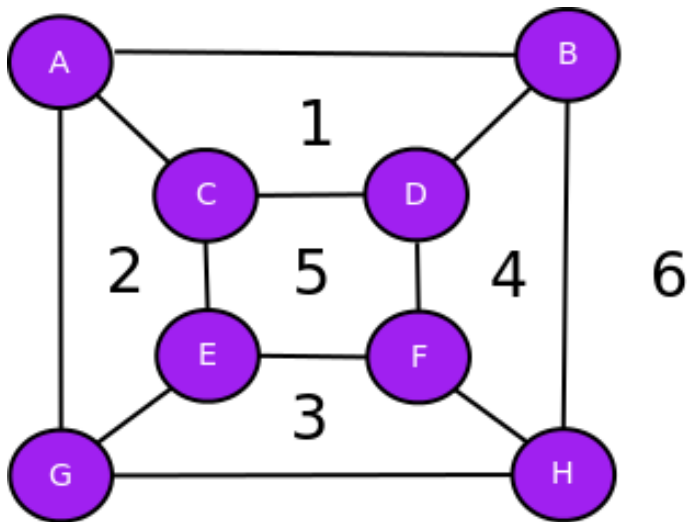
Slika: Grafa, ki nista ravninska

Področja (oziroma lica)

Področja (oziroma lica)

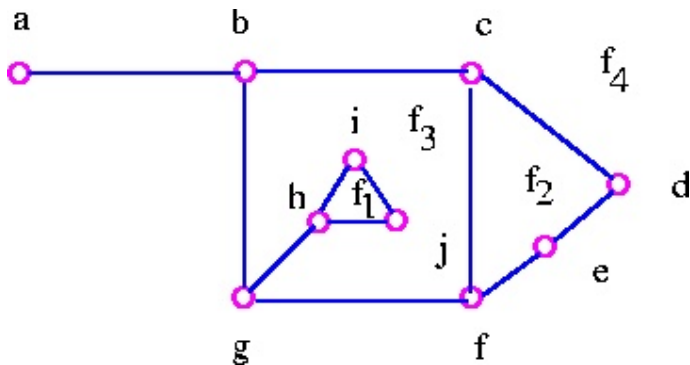
Ravninski graf nam ravnino razdeli na nekaj področij - natanko eno od teh področij je neskončno, ostala so končna.

Ravninski graf - področja



Slika: Ravninski graf in njegova področja

Ravninski graf - področja

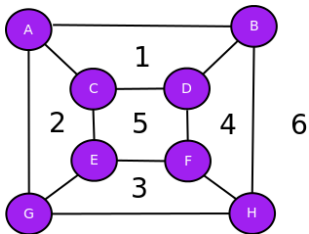


Slika: Ravninski graf in njegova področja

Vozlišča, povezave in področja

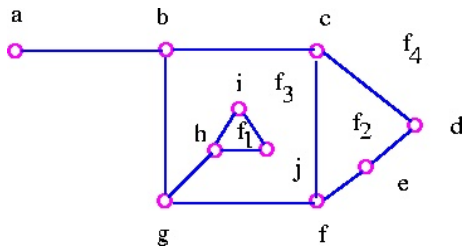
Naj bo Γ ravninski graf. Z v označimo število njegovih vozlišč, z e število njegovih povezav, in z f število njegovih področij.

Eulerjeva formula



- $v = 8$
- $e = 12$
- $f = 6$

Eulerjeva formula



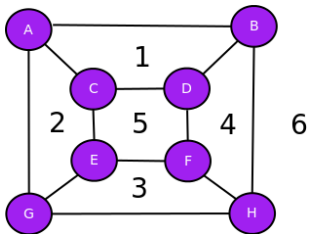
- $v = 10$
- $e = 12$
- $f = 4$

Eulerjeva formula

Naj bo Γ povezan ravninski graf z v vozlišči, e povezavami, in f področji. Potem velja

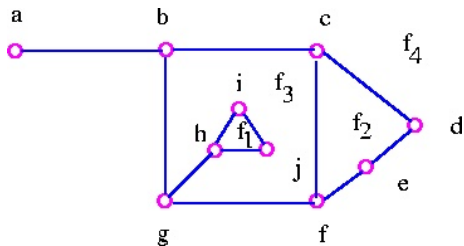
$$v - e + f = 2.$$

Eulerjeva formula



- $v = 8$
- $e = 12$
- $f = 6$
- $v - e + f = 2$

Eulerjeva formula



- $v = 10$
- $e = 12$
- $f = 4$
- $v - e + f = 2$

Eulerjeva formula - posledica

Naj bo Γ povezan ravninski graf z v vozlišči, e povezavami, in f področji. Naj bo $v \geq 3$. Potem velja

$$e \leq 3v - 6.$$

Dokaz: Če za vsako področje preštejemo povezave, ki ga omejujejo, in ta števila seštejemo med sabo, bomo dobili natanko $2e$ (ker vsaka povezava omejuje natanko dve področji).

Dokaz: Če za vsako področje preštejemo povezave, ki ga omejujejo, in ta števila seštejemo med sabo, bomo dobili natanko $2e$ (ker vsaka povezava omejuje natanko dve področji). Vsako področje omejujejo vsaj tri povezave. Zato sledi

$$3f \leq 2e.$$

Dokaz: Če za vsako področje preštejemo povezave, ki ga omejujejo, in ta števila seštejemo med sabo, bomo dobili natanko $2e$ (ker vsaka povezava omejuje natanko dve področji). Vsako področje omejujejo vsaj tri povezave. Zato sledi

$$3f \leq 2e.$$

Torej iz Eulerjeve formule dobimo:

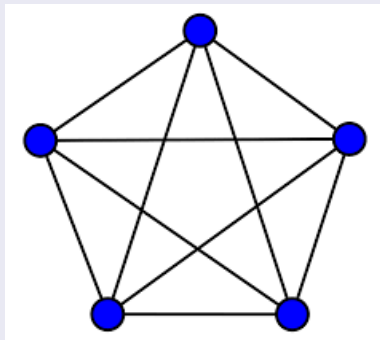
$$3e = 3v + 3f - 6 \leq 3v + 2e - 6,$$

oziroma $e \leq 3v - 6$.

Eulerjeva formula - posledica

Eulerjeva formula - posledica

Graf



ni ravninski.

Dokaz: Ta graf ima $v = 5$ in $e = 10$. Če bi bil ravninski, bi po prejšnji posledici veljalo

$$10 = e \leq 3v - 6 = 9,$$

kar pa je seveda protislovje.

Eulerjeva formula - posledica

Vsak (povezan) ravninski graf vsebuje vsaj eno vozlišče, katerega stopnja je manjša ali enaka 5.

Dokaz: Če je $v = 1$ ali $v = 2$, potem zgornja trditev seveda drži. Zato privzemimo, da je $v \geq 3$. Po prejšnji posledici velja

$$e \leq 3v - 6.$$

Dokaz: Če je $v = 1$ ali $v = 2$, potem zgornja trditev seveda drži. Zato privzemimo, da je $v \geq 3$. Po prejšnji posledici velja

$$e \leq 3v - 6.$$

Naj bo V množica vozlišč grafa. Vemo že, da velja

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2e.$$

Dokaz (nadaljevanje): Če ima vsako vozlišče stopnjo vsaj 6, potem seveda velja

$$6v \leq \sum_{x \in V} d(x) = 2e,$$

oziroma $3v \leq e$.

Dokaz (nadaljevanje): Če ima vsako vozlišče stopnjo vsaj 6, potem seveda velja

$$6v \leq \sum_{x \in V} d(x) = 2e,$$

oziroma $3v \leq e$.

Sedaj pa iz prejšnje posledice sledi, da je

$$e \leq 3v - 6 \leq e - 6,$$

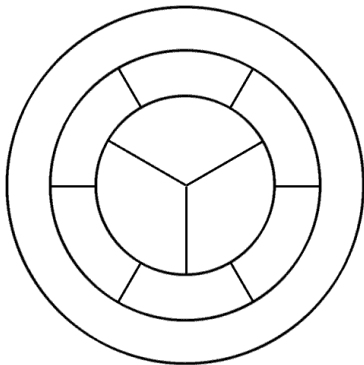
kar pa je seveda protislovje.



Slika: Zemljevid Evrope

Zemljevid

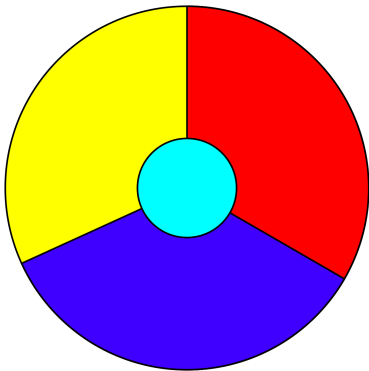
Zemljevid je vsaka razdelitev ravnine na “države” (oziroma področja).



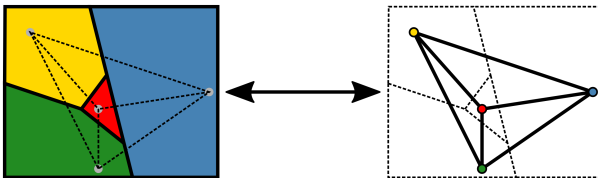
Slika: Zemljevid

Kolikšno je najmanjše število barv, ki jih potrebujemo, da lahko vsak zemljevid pobarvamo s temi barvami tako, da nobeni dve državi, ki imata skupno mejo, nista pobarvani z isto barvo?

To število je vsaj 4:



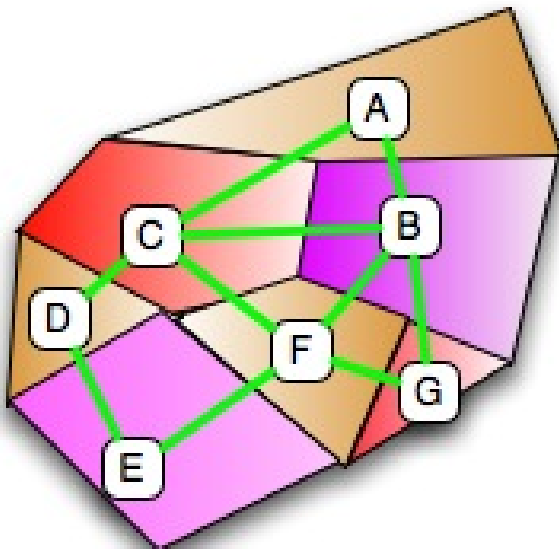
Slika: Rabimo vsaj štiri barve



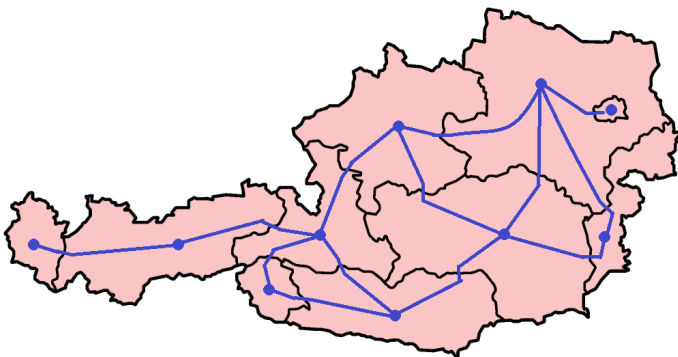
Slika: Konstrukcija grafa iz zemljevida

Iz vsakega ravninskega grafa lahko dobimo zemljevid. In obratno: iz vsakega zemljevida lahko dobimo ravninski graf.

Ravninski grafi in zemljevidi

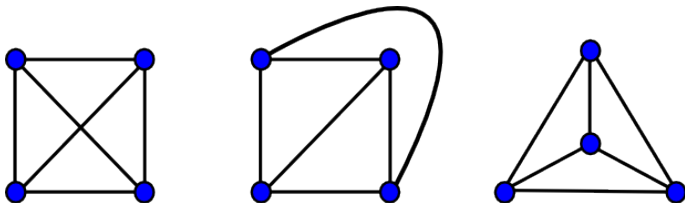


Ravninski grafi in zemljevidi



Kolikšno je najmanjše število barv, ki jih potrebujemo, da lahko pobarvamo vozlišča vsakega ravninskega grafa tako, da nobeni dve sosednji vozlišči nista pobarvani z isto barvo?

To število je vsaj 4:



Slika: Rabimo vsaj štiri barve

Izrek

Vozlišča vsakega ravninskega grafa lahko pobarvamo s šestimi barvami tako, da sta poljubni dve sosednji vozlišči pobarvani z različnima barvama.

Šest barv je vedno dovolj

Dokaz: Naj bo Γ ravninski graf. Vemo že, da ima Γ vsaj eno vozlišče stopnje manjše ali enake 5. Izberimo si poljubno vozlišče grafa, ki ima stopnjo manjšo ali enako 5, ter odstranimo to vozlišče ter vse povezave iz tega vozlišča. Dobimo graf Γ_1 , ki je še vedno ravninski.

Šest barv je vedno dovolj

Dokaz: Naj bo Γ ravninski graf. Vemo že, da ima Γ vsaj eno vozlišče stopnje manjše ali enake 5. Izberimo si poljubno vozlišče grafa, ki ima stopnjo manjšo ali enako 5, ter odstranimo to vozlišče ter vse povezave iz tega vozlišča. Dobimo graf Γ_1 , ki je še vedno ravninski.

Postopek nadaljujemo, dokler ne dobimo grafa, ki ima šest ali manj vozlišč. Vsako od teh vozlišč pobarvajmo s svojo barvo.

Šest barv je vedno dovolj

Dokaz: Naj bo Γ ravninski graf. Vemo že, da ima Γ vsaj eno vozlišče stopnje manjše ali enake 5. Izberimo si poljubno vozlišče grafa, ki ima stopnjo manjšo ali enako 5, ter odstranimo to vozlišče ter vse povezave iz tega vozlišča. Dobimo graf Γ_1 , ki je še vedno ravninski.

Postopek nadaljujemo, dokler ne dobimo grafa, ki ima šest ali manj vozlišč. Vsako od teh vozlišč pobarvamo s svojo barvo.

Sedaj pa zaporedoma dodajamo nazaj vozlišča, ki smo jih odvzeli. Za vsako dodano vozlišče imamo prosto vsaj eno barvo, s katero ga lahko pobarvamo.

Izrek (Heawood)

Vozlišča vsakega ravninskega grafa lahko pobarvamo s petimi barvami tako, da sta poljubni dve sosednji vozlišči pobarvani z različnima barvama.



Slika: Percy John Heawood (1861 - 1955)

Izrek (Appel in Haken)

Vozlišča vsakega ravninskega grafa lahko pobarvamo s štirimi barvami tako, da sta poljubni dve sosednji vozlišči pobarvani z različnima barvama.



Slika: Kenneth Appel (1932-2013)



Slika: Wolfgang Haken
(1928-2022)

Hvala!