# Prirejanja v grafih, od stabilnih porok do cvetenja

Nina Chiarelli

FAMNITovi izleti v matematično vesolje
Februar 2026

# O čem bomo govorili

1. Kaj je prirejanje v grafu?
2. Osnovno o prirejanjih
3. Stabilna prirejanja
   - Problem stabilne poroke
   - Problem stabilnih sostanovalcev
   - Problem dodeljevanja specializantov bolnišnicam
4. Utežena prirejanja
   - Madžarska metoda
   - Algoritem cvetenja

# O čem bomo govorili

1. Kaj je prirejanje v grafu?
2. Osnovno o prirejanjih
3. Stabilna prirejanja
   - Problem stabilne poroke
   - Problem stabilnih sostanovalcev
   - Problem dodeljevanja specializantov bolnišnicam
4. Utežena prirejanja
   - Madžarska metoda
   - Algoritem cvetenja

# Najprej potrebujemo graf...

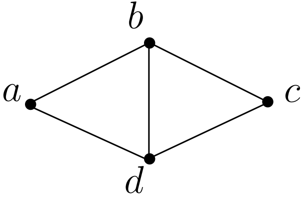
*Graf* je matematični objekt, ki sestoji iz množice točk ($V$) in množice povezav ($E$).

# Najprej potrebujemo graf...

*Graf* je matematični objekt, ki sestoji iz množice točk ($V$) in množice povezav ($E$).
Povezave so dvoelementne podmnožice množice točk.

# Najprej potrebujemo graf...

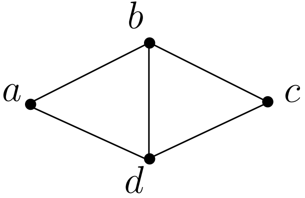
*Graf* je matematični objekt, ki sestoji iz množice točk ($V$) in množice povezav ($E$).
Povezave so dvoelementne podmnožice množice točk.



# Najprej potrebujemo graf...

*Graf* je matematični objekt, ki sestoji iz množice točk ($V$) in množice povezav ($E$).
Povezave so dvoelementne podmnožice množice točk.

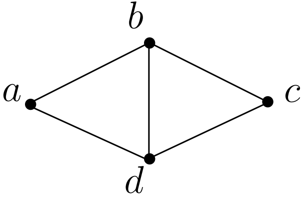
$$V = \{a, b, c, d\}$$



# Najprej potrebujemo graf...

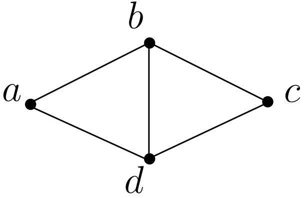
*Graf* je matematični objekt, ki sestoji iz množice točk ($V$) in množice povezav ($E$).
Povezave so dvoelementne podmnožice množice točk.

$$V = \{a, b, c, d\}$$
$$E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$$



# Najprej potrebujemo graf...

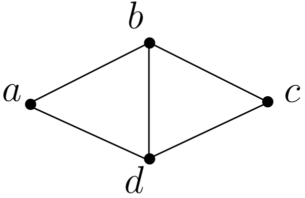
*Graf* je matematični objekt, ki sestoji iz množice točk ($V$) in množice povezav ($E$).
Povezave so dvoelementne podmnožice množice točk.




$V = \{a, b, c, d\}$
$E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$
Zapis povezav običajno poenostavimo:
$E = \{ab, ad, bc, bd, cd\}$.

# Najprej potrebujemo graf...

*Graf* je matematični objekt, ki sestoji iz množice točk ($V$) in množice povezav ($E$).
Povezave so dvoelementne podmnožice množice točk.



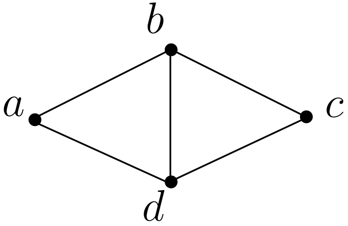

$V = \{a, b, c, d\}$
$E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$
Zapis povezav običajno poenostavimo:
$E = \{ab, ad, bc, bd, cd\}$.
Povezavi, ki imata skupno točko, sta sosednji. Točki, ki tvorita povezavo sta sosednji.

# ...in nato se lahko pogovarjamo o prirejanju

*Prirejanje* je vsaka podmnožica povezav $M \subseteq E$, za katero velja, da ne vsebuje sosednjih povezav.

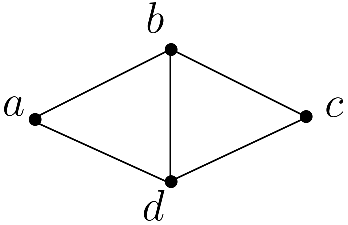
# ...in nato se lahko pogovarjamo o prirejanju

*Prirejanje* je vsaka podmnožica povezav $M \subseteq E$, za katero velja, da ne vsebuje sosednjih povezav.



# ...in nato se lahko pogovarjamo o prirejanju

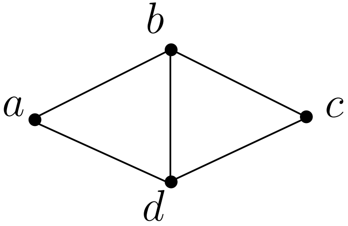
*Prirejanje* je vsaka podmnožica povezav $M \subseteq E$, za katero velja, da ne vsebuje sosednjih povezav.




$M_1 = \{ab\}$,

# ...in nato se lahko pogovarjamo o prirejanju

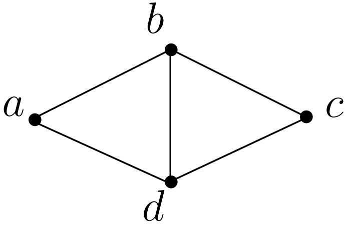
*Prirejanje* je vsaka podmnožica povezav $M \subseteq E$, za katero velja, da ne vsebuje sosednjih povezav.




$M_1 = \{ab\}$, $M_2 = \{bd\}$

# ...in nato se lahko pogovarjamo o prirejanju

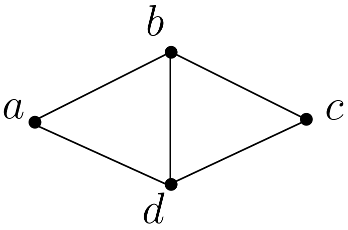
*Prirejanje* je vsaka podmnožica povezav $M \subseteq E$, za katero velja, da ne vsebuje sosednjih povezav.




$M_1 = \{ab\}$, $M_2 = \{bd\}$
$M_3 = \{ad\}$,

# ...in nato se lahko pogovarjamo o prirejanju

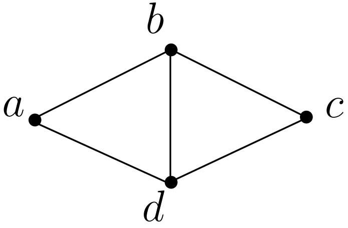
*Prirejanje* je vsaka podmnožica povezav $M \subseteq E$, za katero velja, da ne vsebuje sosednjih povezav.




$M_1 = \{ab\}$, $M_2 = \{bd\}$
$M_3 = \{ad\}, M_4 = \{ad, bc\}$

# ...in nato se lahko pogovarjamo o prirejanju

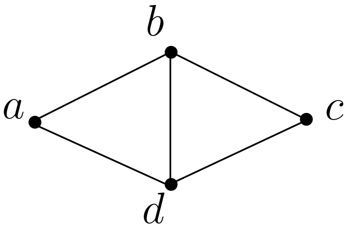
*Prirejanje* je vsaka podmnožica povezav $M \subseteq E$, za katero velja, da ne vsebuje sosednjih povezav.




$M_1 = \{ab\}$, $M_2 = \{bd\}$
$M_3 = \{ad\}, M_4 = \{ad, bc\}$
Množici $M_2$ in $M_4$ predstavljata *maksimalno prirejanje*.

## ...in nato se lahko pogovarjamo o prirejanju

*Prirejanje* je vsaka podmnožica povezav $M \subseteq E$, za katero velja, da ne vsebuje sosednjih povezav.




$M_1 = \{ab\}$, $M_2 = \{bd\}$
$M_3 = \{ad\}, M_4 = \{ad, bc\}$
Množici $M_2$ in $M_4$ predstavljata *maksimalno prirejanje*.
Množica $M_4$ je obenem tudi *popolno prirejanje* in *največje prirejanje* .

# O čem bomo govorili

1. Kaj je prirejanje v grafu?
2. Osnovno o prirejanjih
3. Stabilna prirejanja
   - Problem stabilne poroke
   - Problem stabilnih sostanovalcev
   - Problem dodeljevanja specializantov bolnišnicam
4. Utežena prirejanja
   - Madžarska metoda
   - Algoritem cvetenja

# Hallov poročni izrek

Imamo 6 daril, ki bi jih radi razdelili med 5 prijateljev. Ali lahko podarimo eno darilo vsakemu prijatelju tako, da bo vsak dobil nekaj, česar bo vesel?

# Hallov poročni izrek

Imamo 6 daril, ki bi jih radi razdelili med 5 prijateljev. Ali lahko podarimo eno darilo vsakemu prijatelju tako, da bo vsak dobil nekaj, česar bo vesel?

- Označimo darila s številkami: $1, 2, 3, 4, 5, 6$ in prijatelje s črkami: $A, B, C, D, E$.

# Hallov poročni izrek

Imamo 6 daril, ki bi jih radi razdelili med 5 prijateljev. Ali lahko podarimo eno darilo vsakemu prijatelju tako, da bo vsak dobil nekaj, česar bo vesel?

- Označimo darila s številkami: $1, 2, 3, 4, 5, 6$ in prijatelje s črkami: $A, B, C, D, E$.
- Recimo, da so preference sledeče:

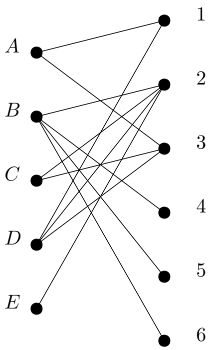
| | |
|---|---|
| $A$ | $1, 3$ |
| $B$ | $2, 4, 5, 6$ |
| $C$ | $2, 3$ |
| $D$ | $1, 2, 3$ |
| $E$ | $2$ |

# Hallov poročni izrek

Imamo 6 daril, ki bi jih radi razdelili med 5 prijateljev. Ali lahko podarimo eno darilo vsakemu prijatelju tako, da bo vsak dobil nekaj, česar bo vesel?

- Označimo darila s številkami: $1, 2, 3, 4, 5, 6$ in prijatelje s črkami: $A, B, C, D, E$.
- Recimo, da so preference sledeče:

| | |
|---|---|
| $A$ | $1, 3$ |
| $B$ | $2, 4, 5, 6$ |
| $C$ | $2, 3$ |
| $D$ | $1, 2, 3$ |
| $E$ | $2$ |



Naj bo $S$ družina končnih množic, označimo jih z $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Zaporedju $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pravimo sistem različnih predstavnikov (SRP) $A_1, A_2, \ldots, A_n$, če je $a_i \in A_i$ in so $a_i$ paroma različni elementi ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$).

Naj bo $S$ družina končnih množic, označimo jih z $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Zaporedju $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pravimo sistem različnih predstavnikov (SRP) $A_1, A_2, \ldots, A_n$, če je $a_i \in A_i$ in so $a_i$ paroma različni elementi ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$).

**Primer**

Recimo, da imamo družino $S = \{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,3\}\}$.

Naj bo $S$ družina končnih množic, označimo jih z $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Zaporedju $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pravimo sistem različnih predstavnikov (SRP) $A_1, A_2, \ldots, A_n$, če je $a_i \in A_i$ in so $a_i$ paroma različni elementi ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$).

**Primer**

Recimo, da imamo družino $S = \{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,3\}\}$.
Potem obstaja SRP, npr.: $1, 4, 3$.

Naj bo $S$ družina končnih množic, označimo jih z $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Zaporedju $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pravimo sistem različnih predstavnikov (SRP) $A_1, A_2, \ldots, A_n$, če je $a_i \in A_i$ in so $a_i$ paroma različni elementi ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$).

### Primer

Recimo, da imamo družino $S = \{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,3\}\}$.
Potem obstaja SRP, npr.: $1, 4, 3$.

### Izrek (Hall, 1953)

Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ neprazne podmnožice končne množice $S$. Zaporedje SRP obstaja natanko tedaj, ko vsaka unija katerihkoli $m$ množic vsebuje vsaj $m$ elementov ($1 \leq m \leq n$).

Izrek lahko zapišemo tudi nekoliko drugače, v jeziku grafov.

Izrek lahko zapišemo tudi nekoliko drugače, v jeziku grafov.
Graf je dvodelen, če lahko točke razdelimo v dve podmnožici $V_1, V_2$ in imajo vse povezave eno krajišče v množici $V_1$ in drugo v množici $V_2$.

Izrek lahko zapišemo tudi nekoliko drugače, v jeziku grafov.
Graf je dvodelen, če lahko točke razdelimo v dve podmnožici $V_1, V_2$ in imajo vse povezave eno krajišče v množici $V_1$ in drugo v množici $V_2$.

### Izrek (Hall, 1953)

Naj bo $G$ dvodelen graf. Potem obstaja prirejanje, ki pokrije vse točke v množici $V_1$ če in samo če je za vsako podmnožico $X \subseteq V_1$ število točk v $V_2$, ki imajo za soseda neko točko iz $X$ vsaj tolikšno, kolikor je elementov v množici $X$.

V vsakem grafu lahko enostavno poiščemo maksimalno prirejanje, z uporabo požrešnega algoritma. Vendar, maksimalno prirejanje ni nujno največje prirejanje!

V vsakem grafu lahko enostavno poiščemo maksimalno prirejanje, z uporabo požrešnega algoritma. Vendar, maksimalno prirejanje ni nujno največje prirejanje!

**Izrek (Berge, 1957)**

Prirejanje $M$ v grafu $G$ je največje, če in samo če v $G$ ne obstaja $M$-povečujoča pot (t.j. pot, ki se začne in konča v točki, ki ni krajišče nobene povezave iz $M$ in v kateri alternirajo povezave, ki niso vsebovane v $M$ in povezave, ki so vsebovane v $M$).

# O čem bomo govorili

1. Kaj je prirejanje v grafu?
2. Osnovno o prirejanjih
3. Stabilna prirejanja
   - Problem stabilne poroke
   - Problem stabilnih sostanovalcev
   - Problem dodeljevanja specializantov bolnišnicam
4. Utežena prirejanja
   - Madžarska metoda
   - Algoritem cvetenja

Imamo $n$ deklet in $n$ fantov in vsak izmed njih je razvrstil predstavnike nasprotnega spola glede na lastne preference. Ali jih lahko poparčkamo tako, da ne bo obstajal par, ki bi bil raje skupaj, kot s svojima trenutnima partnerjema.

Ko takšnega para ni pravimo, da je množica porok stabilna.

# Primer

Označimo z $d_1, d_2, d_3, d_4$ dekleta in z $f_1, f_2, f_3, f_4$ fante ter recimo, da je razvrstitev sledeča:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | 1 | 3 | 2 | 4 |
| $d_2$ | 3 | 4 | 1 | 2 |
| $d_3$ | 4 | 2 | 3 | 1 |
| $d_4$ | 3 | 2 | 1 | 4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | 2 | 1 | 3 | 4 |
| $f_2$ | 4 | 1 | 2 | 3 |
| $f_3$ | 1 | 3 | 2 | 4 |
| $f_4$ | 2 | 3 | 1 | 4 |

# Primer

Označimo z $d_1, d_2, d_3, d_4$ dekleta in z $f_1, f_2, f_3, f_4$ fante ter recimo, da je razvrstitev sledeča:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | 1 | 3 | 2 | 4 |
| $d_2$ | 3 | 4 | 1 | 2 |
| $d_3$ | 4 | 2 | 3 | 1 |
| $d_4$ | 3 | 2 | 1 | 4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | 2 | 1 | 3 | 4 |
| $f_2$ | 4 | 1 | 2 | 3 |
| $f_3$ | 1 | 3 | 2 | 4 |
| $f_4$ | 2 | 3 | 1 | 4 |

Stabilno prirejanje za dan primer je:
$\{\{d_1, f_1\}, \{d_2, f_4\}, \{d_3, f_3\}, \{d_4, f_2\}\}$

# Primer

Označimo z $d_1, d_2, d_3, d_4$ dekleta in z $f_1, f_2, f_3, f_4$ fante ter recimo, da je razvrstitev sledeča:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | 1 | 3 | 2 | 4 |
| $d_2$ | 3 | 4 | 1 | 2 |
| $d_3$ | 4 | 2 | 3 | 1 |
| $d_4$ | 3 | 2 | 1 | 4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | 2 | 1 | 3 | 4 |
| $f_2$ | 4 | 1 | 2 | 3 |
| $f_3$ | 1 | 3 | 2 | 4 |
| $f_4$ | 2 | 3 | 1 | 4 |

Stabilno prirejanje za dan primer je:
$\{\{d_1, f_1\}, \{d_2, f_4\}, \{d_3, f_3\}, \{d_4, f_2\}\}$

**Izrek (Gale in Shapley, 1962)**

V dvodelnih grafih, z deloma enake velikosti, lahko vedno najdemo stabilno prirejanje.

Imamo $2n$ oseb in vsaka izmed njih je razvrstila vse ostale osebe glede na lastne preference. Ali jih lahko poparčkamo tako, da ne bo obstajal par, ki bi raje živeli skupaj, kot s svojima trenutnima sostanovalcema.

# Primer

Predpostavimo, da imamo 6 oseb in da so njihove preference sledeče:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 2 | 6 | 5 |
| 2 | 6 | 5 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 4 | 5 | 1 | 6 |
| 4 | 5 | 2 | 3 | 6 | 1 |
| 5 | 3 | 1 | 2 | 4 | 6 |
| 6 | 5 | 1 | 3 | 4 | 2 |

# Primer

Predpostavimo, da imamo 6 oseb in da so njihove preference sledeče:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 2 | 6 | 5 |
| 2 | 6 | 5 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 4 | 5 | 1 | 6 |
| 4 | 5 | 2 | 3 | 6 | 1 |
| 5 | 3 | 1 | 2 | 4 | 6 |
| 6 | 5 | 1 | 3 | 4 | 2 |

Stabilno prirejanje je v tem primeru: $\{16, 24, 35\}$

Algoritem, ki nam pove, ali stabilno prirejanje obstaja ali ne je razvil Irving leta 1985.

Algoritem, ki nam pove, ali stabilno prirejanje obstaja ali ne je razvil Irving leta 1985.
Primer preferenc, ko stabilno prirejanje ne obstaja:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 2 | 4 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |

Imamo $n$ specializantov in $m$ bolnišnic. Vsak specializant ima svoj preferenčni seznam bolnišnic (ne nujno vseh $m$), vsaka bolnišnica ima svoj preferenčni seznam za kader. Ali lahko specializante razvrstimo po bolnišnicah tako, da bodo vsi kar se da zadovoljni?

Imamo $n$ specializantov in $m$ bolnišnic. Vsak specializant ima svoj preferenčni seznam bolnišnic (ne nujno vseh $m$), vsaka bolnišnica ima svoj preferenčni seznam za kader. Ali lahko specializante razvrstimo po bolnišnicah tako, da bodo vsi kar se da zadovoljni?

Glede na prejšnja dva problema je ta drugačen, ker lahko bolnišnica sprejme več kot enega specializanta... torej ne govorimo več o prirejanjih.

# O čem bomo govorili

1. Kaj je prirejanje v grafu?
2. Osnovno o prirejanjih
3. Stabilna prirejanja
   - Problem stabilne poroke
   - Problem stabilnih sostanovalcev
   - Problem dodeljevanja specializantov bolnišnicam
4. Utežena prirejanja
   - Madžarska metoda
   - Algoritem cvetenja

Preference $\rightarrow$ Cena ($=$ utež)

Preference $\rightarrow$ Cena ($=$ utež)
Iščemo lahko najlažje ali najtežje prirejanje (odvisno od problema).

Preference $\rightarrow$ Cena ($=$ utež)
Iščemo lahko najlažje ali najtežje prirejanje (odvisno od problema).
Utežena prirejanja so uporabna pri problemih razporejanja (delavcev na delovna mesta, taksijev med stranke,...)

Preference $\rightarrow$ Cena ($=$ utež)
Iščemo lahko najlažje ali najtežje prirejanje (odvisno od problema).
Utežena prirejanja so uporabna pri problemih razporejanja (delavcev na delovna mesta, taksijev med stranke,...)
Predpostavlja se, da so uteži nenegativna števila.

# Primer

Gradbeno podjetje ima štiri velike buldožerje parkirane v štirih garažah. Buldožerje potrebujejo na štirih gradbiščih $A, B, C, D$, razdalja med garažami in gradbišči je podana v naslednji tabeli:

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 90 | 75 | 75 | 80 |
| 2 | 35 | 85 | 55 | 65 |
| 3 | 125 | 95 | 90 | 105 |
| 4 | 45 | 110 | 95 | 115 |

Kateri budložer naj gre na katero gradbišče, če želimo prepotovati čim manjšo skupno razdaljo?

# Primer

Gradbeno podjetje ima štiri velike buldožerje parkirane v štirih garažah. Buldožerje potrebujejo na štirih gradbiščih $A, B, C, D$, razdalja med garažami in gradbišči je podana v naslednji tabeli:

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 90 | 75 | 75 | 80 |
| 2 | 35 | 85 | 55 | 65 |
| 3 | 125 | 95 | 90 | 105 |
| 4 | 45 | 110 | 95 | 115 |

Kateri budložer naj gre na katero gradbišče, če želimo prepotovati čim manjšo skupno razdaljo?
Prvi bager gre na gradbišče $D$, drugi na gradišče $C$, tretji na gradbišče $B$ in četrti na gradbišče $A$. Skupno naredijo 275 km.

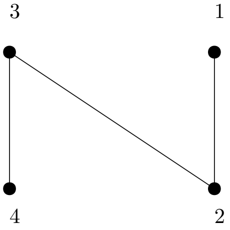
# Ideja za algoritmom

Algoritem je delo Kuhna (1955), ki je nastal na podlagi predhodnega dela madžarskih matematikov Königa in Egerváryja.

# Ideja za algoritmom

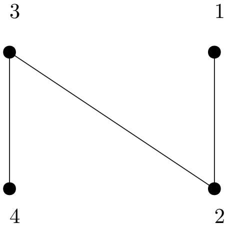
Algoritem je delo Kuhna (1955), ki je nastal na podlagi predhodnega dela madžarskih matematikov Königa in Egerváryja.

*Pokritje* je vsaka podmnožica točk $C \subseteq V$, za katero velja, da ima vsaka povezava grafa $G$ vsaj eno krajišče v $C$.



# Ideja za algoritmom

Algoritem je delo Kuhna (1955), ki je nastal na podlagi predhodnega dela madžarskih matematikov Königa in Egerváryja.
*Pokritje* je vsaka podmnožica točk $C \subseteq V$, za katero velja, da ima vsaka povezava grafa $G$ vsaj eno krajišče v $C$.

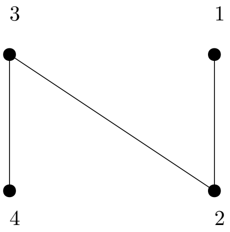



$$C_1 = \{1, 2, 3\},$$

# Ideja za algoritmom

Algoritem je delo Kuhna (1955), ki je nastal na podlagi predhodnega dela madžarskih matematikov Königa in Egerváry.

*Pokritje* je vsaka podmnožica točk $C \subseteq V$, za katero velja, da ima vsaka povezava grafa $G$ vsaj eno krajišče v $C$.

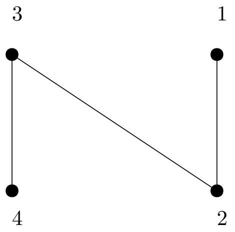



$C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{2, 3, 4\}$

# Ideja za algoritmom

Algoritem je delo Kuhna (1955), ki je nastal na podlagi predhodnega dela madžarskih matematikov Königa in Egerváryja.

*Pokritje* je vsaka podmnožica točk $C \subseteq V$, za katero velja, da ima vsaka povezava grafa $G$ vsaj eno krajišče v $C$.

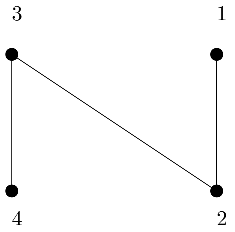



$C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{2, 3, 4\}$
$C_3 = \{1, 2, 3, 4\}$,

# Ideja za algoritmom

Algoritem je delo Kuhna (1955), ki je nastal na podlagi predhodnega dela madžarskih matematikov Königa in Egerváryja.

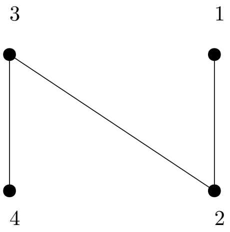
*Pokritje* je vsaka podmnožica točk $C \subseteq V$, za katero velja, da ima vsaka povezava grafa $G$ vsaj eno krajišče v $C$.




$C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{2, 3, 4\}$
$C_3 = \{1, 2, 3, 4\}$, $C_4 = \{2, 3\}$

# Ideja za algoritmom

Algoritem je delo Kuhna (1955), ki je nastal na podlagi predhodnega dela madžarskih matematikov Königa in Egerváry a.
*Pokritje* je vsaka podmnožica točk $C \subseteq V$, za katero velja, da ima vsaka povezava grafa $G$ vsaj eno krajišče v $C$.

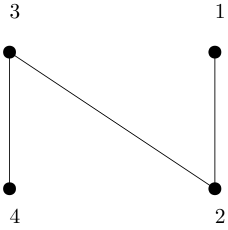



$C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{2, 3, 4\}$
$C_3 = \{1, 2, 3, 4\}$, $C_4 = \{2, 3\}$
Če damo v množico $C$ vse točke grafa, bomo zagotovo s tem pokrili vse povezave...

# Ideja za algoritmom

Algoritem je delo Kuhna (1955), ki je nastal na podlagi predhodnega dela madžarskih matematikov Königa in Egerváry a.

*Pokritje* je vsaka podmnožica točk $C \subseteq V$, za katero velja, da ima vsaka povezava grafa $G$ vsaj eno krajišče v $C$.




$C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{2, 3, 4\}$
$C_3 = \{1, 2, 3, 4\}$, $C_4 = \{2, 3\}$

Če damo v množico $C$ vse točke grafa, bomo zagotovo s tem pokrili vse povezave... torej ne iščemo kakršnega koli pokritja, želimo pokritje najmanjše velikosti.

Velja: Za vsako povezavo v prirejanju potrebujemo vsaj eno točko v pokritju.

Velja: Za vsako povezavo v prirejanju potrebujemo vsaj eno točko v pokritju.

velikost poljubnega pokritja $\geq$ velikost poljubnega prirejanja

Velja: Za vsako povezavo v prirejanju potrebujemo vsaj eno točko v pokritju.

velikost poljubnega pokritja $\geq$ velikost poljubnega prirejanja

Natančneje:
velikost najmanjšega pokritja $\geq$ velikost največjega prirejanja

Velja: Za vsako povezavo v prirejanju potrebujemo vsaj eno točko v pokritju.

velikost poljubnega pokritja $\geq$ velikost poljubnega prirejanja

Natančneje:
velikost najmanjšega pokritja $\geq$ velikost največjega prirejanja

V dvodelnih grafih pa velja enakost! Kar sta leta 1931 neodvisno dokazala König in Egerváry.

Königov izrek nam postreže z dualnostjo med prirejanji in pokritji:

| Prirejanje | Pokritje |
|---|---|
| Max | Min |
| Povezave | Točke |
| Uteži na povezavah | Uteži na točkah? |

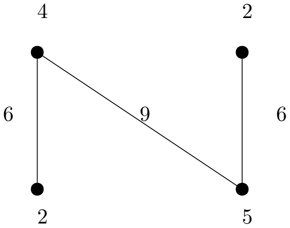
Königov izrek nam postreže z dualnostjo med prirejanji in pokritji:

| Prirejanje | Pokritje |
|---|---|
| Max | Min |
| Povezave | Točke |
| Uteži na povezavah | Uteži na točkah? |

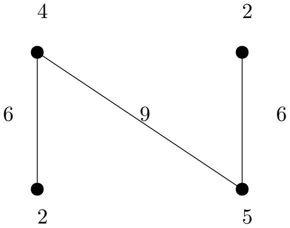
Lahko! Za vsako točko $v \in V$ določimo uteži $w(v)$ tako, da za vsako povezavo $e = \{a, b\}$ velja

$$w(a) + w(b) \geq w(e)$$

Poglejmo si to še na primeru:

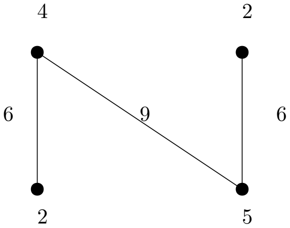


Poglejmo si to še na primeru:



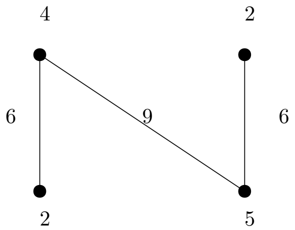

Vsota uteži krajišč vsake povezave je vsaj tolikšna kot je utež na povezavi.

Poglejmo si to še na primeru:



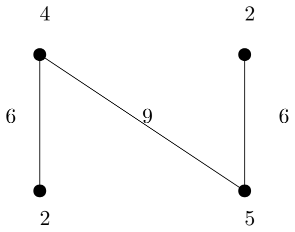

Vsota uteži krajišč vsake povezave je vsaj tolikšna kot je utež na povezavi. Vsota vseh uteži na točkah je $2+4+5+2=13$,

Poglejmo si to še na primeru:




Vsota uteži krajišč vsake povezave je vsaj tolikšna kot je utež na povezavi. Vsota vseh uteži na točkah je $2+4+5+2=13$, a jo lahko zmanjšamo, če zgornji desni točki zmanjšamo utež za 1.

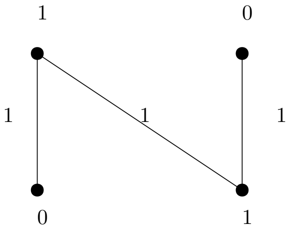
Poglejmo si to še na primeru:



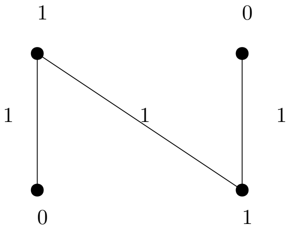

Vsota uteži krajišč vsake povezave je vsaj tolikšna kot je utež na povezavi. Vsota vseh uteži na točkah je $2+4+5+2=13$, a jo lahko zmanjšamo, če zgornji desni točki zmanjšamo utež za 1.

Po tem popravku je vsota uteži na točkah enaka vsoti uteži največjega prirejanja.

in ga še malenkost spremenimo:

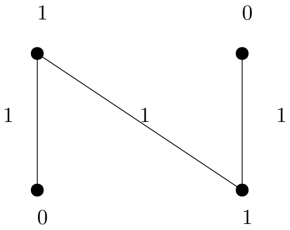


in ga še malenkost spremenimo:




Če so vse uteži na povezavah enake 1, je najtežje prirejanje enako največjemu prirejanju.

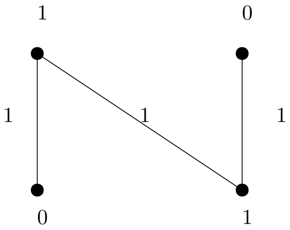
in ga še malenkost spremenimo:




Če so vse uteži na povezavah enake 1, je najtežje prirejanje enako največjemu prirejanju.

Uteži na točkah so sedaj lahko enake 0 ali 1.

in ga še malenkost spremenimo:

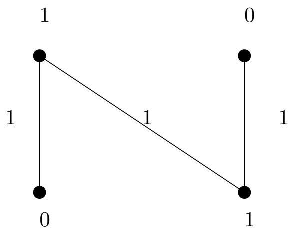



Če so vse uteži na povezavah enake 1, je najtežje prirejanje enako največjemu prirejanju.

Uteži na točkah so sedaj lahko enake 0 ali 1.

Sedaj imamo v pokritju samo točke s težo 1 in obenem vemo, da v prirejanju ne bo povezav, ki imajo obe krajišči v pokritju.

in ga še malenkost spremenimo:



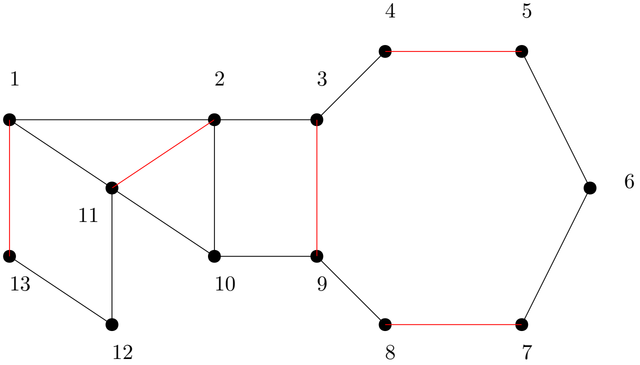

Če so vse uteži na povezavah enake 1, je najtežje prirejanje enako največjemu prirejanju.
Uteži na točkah so sedaj lahko enake 0 ali 1.
Sedaj imamo v pokritju samo točke s težo 1 in obenem vemo, da v prirejanju ne bo povezav, ki imajo obe krajišči v pokritju.
Ostanejo torej ravno tiste povezave, pri katerih je teža enaka vsoti teže krajišč.

Algoritem cvetenja je delo Edmondsa (1961) in rešuje problem najtežjega prirejanja v poljubnih grafih.

Algoritem cvetenja je delo Edmondsa (1961) in rešuje problem najtežjega prirejanja v poljubnih grafih.
Ideja sloni na povečujočih poteh in se obenem uspešno spoprime z morebitnimi cikli v grafu, ki so do tedaj predstavljali težavo:
Cvet = Cikel lihe dolžine
Steblo = Pot, ki se začne z nepokrito točko in vodi do cveta

# Primer

Kako najdemo povečujoče poti?



Hvala za pozornost